

## Степень числа с натуральным показателем

**Опр.** Степенью числа  $a$  с натуральным показателем  $n$  называют произведение числа  $a$  само на себя  $n$  раз.

Обозн.:  $a^n$  – степень числа  $a$

$a$  – **основание**,  $n$  – **показатель**

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

Выражение  $a^n$  читается: "Степень числа  $a$  с показателем  $n$ " или " $a$  в степени  $n$ "

$a^2$  – " $a$  в степени два, или  $a$  в квадрате, или квадрат числа  $a$ ";

$a^3$  – " $a$  в степени три, или  $a$  в кубе, или куб числа  $a$ ".

**Опр.** Вычисления значения степени называют **действием возведения в степень**.

$$\boxed{a^1 = a} \quad \boxed{1^n = 1} \quad \boxed{0^n = 0} \quad \boxed{a^0 = 1} \quad \boxed{a^{-1} = \frac{1}{a}}$$

**Опр.** Степенью числа  $a$  с показателем  $1$  называется само число  $a$ .

$$10^n = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 10}_n = \underbrace{1000 \dots 0}_n$$

**Опр.**  $10$  возвести в степень  $n$  – значит к единицы справа приписать  $n$  нулей.

Если **отрицательное** число возвести в **четную** степень, то результат будет **положительным**, если в **нечетную** степень, то – **отрицательным**.

**Пример:**  $1) (-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16;$

$$2) \left(-\frac{1}{3}\right)^5 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{243}.$$

## Свойства степеней с натуральным показателем

- I. При умножении степеней с одинаковыми основаниями, основание остается прежним, а показатели степеней складываются

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

- II. При делении степеней с одинаковыми основаниями (отличными от нуля) основание остается прежним а показатели степеней вычитаются.

$$a^n : a^m = a^{n-m}, n > m, a \neq 0$$

- III. (**Возведение степени в степень**). При возведении степени в степень основание остается прежним, а показатели степеней перемножаются.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

- IV. При возведении произведения в степень каждый множитель возводят в эту степень.

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

Если каждый множитель возведен в одну и ту же степень, то показатель можно вынести за скобки.

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

- V. При возведении дроби в степень и числитель, и знаменатель возводятся в эту степень.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$$

Если числитель и знаменатель дроби возведены в одну и ту же степень, то показатель степени можно вынести за скобки.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, b \neq 0$$

## Одночлены

**Опр.:** Если множители записаны с помощью цифр, то они называются **числовым множителем**, а множители обозначенные буквами – **буквенными множителями**.

**Опр.:** Произведение числовых и буквенных множителей называют **одночленами**.

Пример:  $0,3 \cdot a \cdot (-0,7) \cdot b$  – одночлен



**Правило 1:** Есть установленные **правила** как надо **записывать** такие **произведения (одночлены)**:

1. Все числовые множители перемножают и их произведение ставят на первое место;
2. После числового множителя записывают буквенные множители;
3. Если одна буква встречается несколько раз, то ее произведение само на себя записывают в виде степени с этим основанием (Пример:  $x \cdot x \cdot x = x^3$ ).

Такой порядок записи называют **стандартным видом одночлена**.

Пример:

$$\underline{0,3} \cdot \underline{a} \cdot \underline{(-0,7)} \cdot \underline{b} = \underline{[0,3 \cdot (-0,7)]} \cdot \underline{[a \cdot b]} = \underline{-0,21ab} \text{ – стандартный вид одночлена}$$

При записи таких произведений будем пользоваться этими правилами.

**Опр.:** **Коэффициент** – это числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде.

Пример:  $\underline{-0,21ab}$  – стандартный вид одночлена  
коэффициент

**Правило 2:** Так как  $1 \cdot a = a$  и  $-1 \cdot a = -a$ , то считают если перед буквенным множителем нет числа или пред ним стоит только знак “-”, то **коэффициент** такого выражения (есть) **равен 1** или **-1** соответственно.

**Опр. Степенью одночлена** называют сумму показателей всех входящих в него буквенных множителей.

Произведение чисел или само *число* являются *одночленами нулевой степени*.

Пример:  $2,1a^3b^2c$  – одночлен степени шесть ( $3+2+1=6$ ).

**Правило:** Чтобы **умножить одночлены**, надо привести произведение к стандартному виду одночлена.

$$\text{Пример: } (3a^2b^3c) \cdot (4ab^2) = [3 \cdot 4] \cdot [a^2a^1b^3b^2c] = 12a^3b^5c.$$

## Многочлен

**Опр. Многочлен** – это алгебраическая сумма нескольких одночленов.

Каждый одночлен, из которого составлен многочлен, называется **членом этого многочлена**.

**Опр. Степень многочлена** – наибольшая из степеней входящих в него одночленов.

Примеры: 1)  $-7x^6yz + 3x^2y^3 + 1$  – трехчлен восьмой степени;  
2)  $5a - 6$  – двухчлен первой степени.

Если одночлены в многочлене отличаются только коэффициентом, то они называются **подобными одночленами**.

Упрощение многочлена, при котором алгебраическая сумма подобных одночленов заменяется одним одночленом, называют **приведением подобных членов**, т.е. выполняют действия с коэффициентами, а буквенную часть оставляют прежней.

**Стандартный вид многочлена** – это его запись, когда каждый член приведен в стандартный вид одночленов и приведены подобные члены.

## Действия над многочленами

**Правило:** Чтобы выполнить **алгебраическую сумму** нескольких многочленов, нужно: 1) раскрыть скобки;

2) привести подобные члены.

Примеры:

$$1) \quad (2n^2 - m^2) - (n^2 - m^2 + 3q^2) = 2n^2 - m^2 - n^2 + m^2 - 3q^2 = n^2 - 3q^2;$$

2)

$$(3ab - 4bc) + (bc - ab) - (ac - 3bc) = 3ab - 4bc + bc - ab - ac + 3bc = 2a$$

Иногда сумму или разность многочленов удобно находить “столбиком”, записывая подобные члены друг под другом.

$$\begin{array}{r} 5a^2b - 4bc + 3ac \\ + \quad \quad 3bc - 7ac \\ \hline 5a^2b - \quad bc - 4ac \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5abc - 2ab + 4ac - bc \\ - \quad 3abc - 3ab - \quad ac + 3bc \\ \hline 2abc + \quad ab + 5ac - 4bc \end{array}$$

**Правило:** Чтобы **умножить многочлен на одночлен**, нужно каждый член многочлена умножить на этот одночлен (*правило “фонтанчика”*) и полученные произведения сложить.

Примеры: 1)  $(2n^2m - 3nm^2)(-4nm) = (2n^2m)(-4nm) + (-3nm^2)(-4nm) =$   
 $= -8n^3m^2 + 12n^2m^3;$   
 2)  $(3a^2 - 4ab + 5c^2)(-5bc) = 3a^2(-5bc) - 4ab(-5bc) + 5c^2(-5bc) =$   
 $= -15a^2bc + 20ab^2c - 25bc^3.$

**Правило:** Чтобы **умножить многочлен на многочлен**, нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена (**правило "фонтанчика"**) и полученные произведения сложить.

Пример:  $(7n - 2m)(3n - 5m) =$   
 $= 7n \cdot 3n + 7n \cdot (-5m) + (-2m) \cdot 3n + (-2m) \cdot (-5m) =$   
 $= 21n^2 - 35nm - 6mn + 10m^2 = 21n^2 - 41nm + 10m^2.$

Чтобы **умножить несколько многочленов**, нужно делать поочередно.

Пример:  $(a + b)(a + 2b)(a - 3b) = (a^2 + 3ab + 2b^2)(a - 3b) =$   
 $= a^3 - 3a^2b + 3a^2b - 9ab^2 + 2ab^2 - 6b^3 = a^3 - 7ab^2 - 6b^3.$

**Правило:** Чтобы **разделить одночлен на одночлен**, нужно коэффициенты разделить на коэффициенты и буквенные части на буквенные части.

Примеры:  $(32a^3b^2) : (4a^2) = (32 : 4) \cdot (a^3 : a^2) \cdot b^2 = 8ab^2.$   
 $(4a^2b^4) : (4a^2b^3) = 1; \quad (66a^4b^2c) : (22a^2b) = 3a^2bc;$   
 $(9k^2n^2m^2) : (-3kn^2m^2) = -3k.$

**Правило:** Чтобы **разделить многочлен на одночлен**, нужно каждый член многочлена умножить на этот одночлен (**правило "фонтанчика"**) и полученные результаты сложить.

Примеры:  $(2a^2b + 4ab^2 + 8abc) : (2ab) =$   
 $= (2a^2b) : (2ab) + (4ab^2) : (2ab) + (8abc) : (2ab) = a + 2b + 4c.$

$(9a^3b^2 - 3a^2b^3 + a^2b^2) : (3a^2b^2) = (9a^3b^2) : (3a^2b^2) + (-3a^2b^3) : (3a^2b^2) +$   
 $+ (a^2b^2) : (3a^2b^2) = 3a - b + \frac{1}{3}.$